Trasformata di Laplace

SIS-30002
Ottobre 2017
Niccoló Rorato

Generalità

La trasformata di Laplace è un operatore matematico che trasferisce una funzione, inizialmente formulata nel dominio del tempo, in un'altra funzione matematica detta dominio delle trasformate. Nel dominio delle trasformate sono possibili alcune operazioni estremamente difficili nel dominio del tempo (un operazione integrodifferenziale nel dominio del tempo si trasforma in una più semplice operazione algebrica).

$$L\left\{f(t)\right\} = F(s)$$

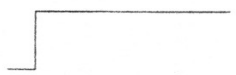
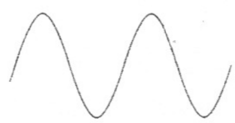
Tale operatore matematico permette perciò di trasferire il problema nel dominio delle trasformate e successivamente applicare l'operazione inversa, l'antitrasformata.

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

L'operazione di trasformazione è la seguente:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

La variabile tempo viene assorbita sviluppando l'integrale, il risultato è una funzione nella sola variabile s. I limiti di integrazione sono 0 e ∞ pertanto per valori di t<0 i valori della funzione f(t) sono ininfluenti.

$f(t)$	$F(s)$	Tipo di segnale	Forma del segnale	Commenti
1	$\frac{1}{s}$	scalino		ampiezza dello scalino = 1
t	$\frac{1}{s^2}$	rampa		rampa di pendenza tgα = 45°
t^2	$\frac{2}{s^3}$	parabola		ricordarsi il 2 al numeratore
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	parabola di ordine n		il termine $n!$ significa: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$
$\delta(t)$	1	impulso		segnale ideale avente area 1 con base → 0 altezza → ∞
$\text{sen}\, \omega \cdot t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	seno		ω è la pulsazione
$\cos \omega \cdot t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	coseno		ω è la pulsazione

Teoremi

La tabella seguente mostra i principali teoremi.

Teorema	Nome	Spiegazione
$L\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = = L\{f_1(t)\} \pm L\{f_2(t)\}$	teorema della sovrapposizione (linearità)	la trasformata di una somma algebrica di due o più funzioni è uguale alla somma algebrica delle singole trasformate
$L\{f(t) \cdot e^{kt}\} = F(s-k)$	teorema della traslazione nel dominio di s	la moltiplicazione di una funzione $f(t)$ per e^{kt} equivale a una traslazione nel dominio di s
$L\{f(t-k)\} = e^{-ks} \cdot F(s)$	teorema della traslazione nel dominio del tempo	la moltiplicazione di una funzione $F(s)$ per e^{-kt} equivale a una traslazione nel dominio del tempo
$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s \cdot F(s) - f(0)$	teorema della derivata	la derivata di una $f(t)$ corrisponde alla moltiplicazione per s nel dominio di s
$L\left\{\int_0^\infty f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$	teorema dell'integrale	l'integrale di una $f(t)$ corrisponde alla divisione per s nel dominio di s
$L\{t \cdot f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$	teorema della moltiplicazione per t	la moltiplicazione per t corrisponde alla derivata rispetto a s nel dominio di s
$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$	teorema del valore finale	il limite per $t \to \infty$ della $f(t)$ coincide con il limite per $s \to 0$ della trasformata $F(s)$ moltiplicata per s
$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$	teorema del valore iniziale	il limite per $t \to 0$ della $f(t)$ coincide con il limite per $s \to \infty$ della trasformata $F(s)$ moltiplicata per s
$L\{K \cdot f(t)\} = K \cdot L\{f(t)\}$	teorema della linearità	una costante moltiplicativa può essere raccolta, cioè "portata fuori" dall'operazione

In sintesi i principali sono:

- Linearità;
- Sovrapposizione;
- Traslazione nel dominio di s;
- Derivata e integrale.

Antitrasformata di Laplace

L'antitrasformata di Laplace è l'operatore matematico inverso della trasformata di Laplace ovvero:
$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$